Minimale endliche Automaten

In der Praxis ist man beim Entwurf und der Realisierung von Systemen oft auch daran interessiert, möglichst wenig Ressourcen zu verbrauchen. Die wesentliche Ressource endlicher Automaten ist die Größe ihres Gedächtnisses, d.h. die Anzahl ihrer Zustände, die bei realen Problemstellungen in der Regel nicht so gering ist, wie bei unseren Beispielen, sondern durchaus in die Tausende gehen kann.

Insofern ist die Frage interessant, ob man zu jedem endlichen Automaten einen äquivalenten minimalen konstruieren kann. Falls diese Frage positiv beantwortet werden kann, stellt sich zudem die Frage, ob es zu einem Automaten genau einen minimalen oder mehrere minimale, die aber unwesentlich verschieden voneinander sind, oder wirklich verschiedene minimale Automaten gibt.

Lektion 10: Minimierung endlicher Automaten

Im Kapitel 2.5 werden Verfahren zur Minimierung von deterministischen endlichen Automaten vorgestellt. Dazu müssen Sie zunächst wissen, was Isomorphie von endlichen Automaten bedeutet. Studieren Sie die Einleitung von Kapitel 2.5 sowie Abschnitt 2.5.1 und lösen Sie die Aufgaben 10.1 und 10.2.

Im Abschnitt 2.5.2 werden die theoretischen Grundlagen für die im folgenden Abschnitt vorgestellten Minimierungsverfahren erläutert. Sie können diesen Abschnitt überschlagen und auch das erste Verfahren, *Markierungsalgorithmus* genannt. Beherrschen sollten Sie allerdings das zweite Verfahren („Variante des Markierungsalgorithmus“), welches im Anschluss an das Beispiel 2.8 zum Markierungsalgorithmus vorgestellt wird. Lösen Sie damit Übung 10.3!

Übungsaufgaben

10.1 Zeigen Sie, dass die Isomorphie zwischen endlichen Automaten eine transitive Relation zwischen endlichen Automaten ist: Sind also A_1, A_2 und A_3 endliche Automaten über Σ und gilt $A_1 \cong A_2$ sowie $A_2 \cong A_3$, dann gilt auch $A_1 \cong A_3$.

10.2 Wir wollen mit $\mathcal{A}_\Sigma$ die Menge aller endlichen Automaten über dem Alphabet Σ bezeichnen. Beweisen Sie, dass die Relation $\cong \subseteq \mathcal{A}_\Sigma \times \mathcal{A}_\Sigma$ eine Äquivalenzrelation über $\mathcal{A}_\Sigma$ ist!

10.3 Die Zustandsüberführung des Automaten

$$A = (\{\, a, b\,\}, \{\, 0, 1, 2, 3, 4\,\}, \delta, 0, \{4\})$$

sei festgelegt durch die folgende Tabelle:

δ	0	1	2	3	4
a	1	4	3	4	4
b	2	2	2	0	4

(1) Minimieren Sie den Automaten A!

(2) Beschreiben Sie $L(A)$ umgangssprachlich!

(3) Geben Sie $L(A)$ formal an!

Lernziele

Nach Durcharbeiten von Lektion 10 sollten Sie

- Isomorphie zwischen endlichen Automaten verstehen, formal definieren und erklären können,
- zu einem endlichen Automaten einen äquivalenten minimalen konstruieren können.